

コンクリート部材の応力度および曲げ耐力の計算

津田 兵衛*
本多 新**

1. まえがき

コンクリート部材の設計における応力度計算、破壊抵抗曲げモーメントの計算は、軸方向力およびモーメントに対する釣合い方程式を解いて中立軸の位置を決定することにより計算される。これらの計算には、条件は付くものの、図表も多く用意されており、一般に手計算により計算は可能であるが、最近はコンピューターを使用することが多くなってきている。この場合、鋼材が降伏しているかいないか等の条件別に式を別個にたてているものをそのままプログラム化するよりも、条件判断はコンピューターにさせる方が機能を生かした使い方といえる。

本論文では、初めに弾性計算と終局強度計算の関係について述べ、いくつかの断面形状について、コンピューター向きに簡潔に、式を表現した。

これらの計算はマイクロコンピューター（プログラム電卓、ポケットコンピューター）で十分可能である。BASIC, FORTRAN によるプログラムは多くあり、組むのも容易であると思われるので、かなり以前からある一種のアッセンブリー言語を使用したプログラム電卓でのプログラム例を最後に付けた。計算機は CASIO-FX-502P を使用した。

2. 一般式および解法

コンクリート部材の応力度および曲げ耐力（破壊抵抗曲げモーメント）の計算は軸方向力とモーメントに関する

る2つの釣合い式を解くことにより計算できる。ここではコンクリート断面に引張力が生じている状態での計算について述べるが、以下の仮定に基づいて行う。

- 1) 維ひずみは断面の中立軸からの距離に比例する。
 - 2) コンクリートの引張応力を無視する。

一般式として、軸方向力およびモーメントの釣合いから次の2式がえられる。未知数としては、表示を簡単にするため中立軸位置 x およびコンクリート圧縮繰ひずみ ε_c をとると、 x, ε_c により各位置のひずみが決定される。

軸方向力の釣合いから

圧縮縁に関するモーメントの釣合いから

$$F_m(x, \varepsilon_c) = -k_z \cdot x \cdot C' - d'_s \cdot T'_{sc} + d_s \cdot T_{st} + d_p \cdot T_{pt} + u' \cdot N - M = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

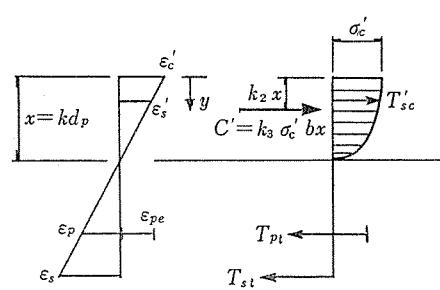
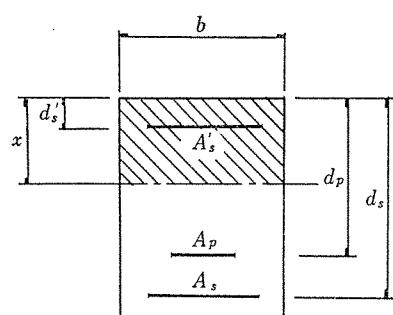
ここで合力 C' , T' , T は各位置のひずみの関数として次のように表わされる。

コンクリート圧縮合力および作用位置は、

$$k_2 x = \int_0^x \sigma'_c(y) \cdot b(y) \cdot y \cdot dy / C' \dots \dots \dots \quad (4)$$

鉄筋の作用力は、各位置でのひずみの関数として、

PC 鋼材の作用力は、鋼材位置のコンクリート応力度が 0 の状態での鋼材ひずみ ($\epsilon_{pe} + \epsilon_{cpq} \div \epsilon_{pe}$)、有効緊張



图—1

* 飛島建設(株)技術本部土木技術部次長

** 飛島建設（株）技術本部土木技術部設計課主任

記 号

f'_{cd} : コンクリートの圧縮強度の設計用値
 f'_{ck} : コンクリートの圧縮強度の特性値
 f_{pud} : PC 鋼材の引張強さの設計用値
 f_{pu} : PC 鋼材の引張強さの特性値
 f_{yd} : 鉄筋の降伏強度の設計用値
 f_y : 鉄筋の降伏強度の特性値
 ϵ'_c : コンクリートの圧縮ひずみ（圧縮ひずみを正とする）
 ϵ'_{cu} : コンクリートの終局圧縮ひずみ（圧縮ひずみを正とする）
 ϵ_{pe} : PC 鋼材の有効引張応力度におけるひずみ
 ϵ_s : 主鋼材のひずみ
 α'_c : コンクリートの圧縮応力度（圧縮応力度を正とする）
 σ_p : PC 鋼材の応力度
 σ_s : 鉄筋の応力度
 τ_c : コンクリートの中立軸のせん断応力度
 k_1 : 試験供試体におけるコンクリートの圧縮強度を、構造物中のコンクリートの圧縮強度に換算するための係数
 k_2 : 等価応力ブロックにおける幅に関する係数
 k_3 : 等価応力ブロックにおける高さに関する係数
 E_c : コンクリートの弾性係数
 E_p : PC 鋼材の弾性係数
 E_s : 鉄筋および構造用鋼材の弾性係数
 M : 曲げモーメント
 N : 軸方向力（圧縮力正）
 S : せん断力
 n : 鋼材のヤング係数とコンクリートのヤング係数との比
 I_{cr} : 引張応力を受けるコンクリートを除いた断面2次モーメント
 A_s : 引張鉄筋断面積
 A'_s : 圧縮鉄筋断面積
 A_p : 緊張材または PC 鋼材の断面積
 g : 有効換算断面の重心位置
 M_u : 部材断面の曲げ耐力の算定値
 x : 部材断面の圧縮縁から中立軸までの距離
 b : 断面の幅
 b_w : 部材腹部の幅
 t : T形桁の上突縁の厚さ
 d_s : 圧縮縁から引張鉄筋までの距離
 d'_s : 圧縮縁から圧縮鉄筋までの距離
 d_p : 圧縮縁から PC 鋼材までの距離

力での鋼材ひずみ ϵ_{pe} より一般にわずかに大きいが近似的に ϵ_{pe} でよい) とそこからの増加ひずみ ϵ_p を加えた鋼材ひずみ ($\epsilon_{pe} + \epsilon_p$) の関数として,

PC と RC の違いは、緊張力の有無つまり初期ひずみ ϵ_{pe} が有るか無いかである。弾性計算では応力-ひずみ関係を線形に仮定しているので、Ⅲ種 (PRC) 部材の応力計算は、有効緊張力（正確には鋼材位置でのコンクリート応力度が 0 の状態での緊張力）を軸力として鋼材位置に作用させた RC の応力計算として処理することができる。

コンクリート圧縮合力 C' は、一般には区分積分を行わなければならないが、終局強度計算時のように放物線～直線で応力-ひずみ曲線を表わし、かつ幅 b も圧縮縁からの距離 u の簡単な関数となる場合は区分積分することなく、圧縮縁応力度 σ'_c およびひずみ ϵ'_c による式で表わすことができる。また、鋼材の応力-ひずみ曲線は近似的に折線で表わされる。

コンクリート部材の応力計算、曲げ耐力の計算は2変数の連立方程式(1)式および(2)式を解いて中立軸位置およびコンクリート圧縮縁ひずみを求めるに帰着する。解法としてはいろいろな方法が考えられるが、解の存在範囲が分っている場合には最も簡単な二分法が適している。区間の判定に若干のくふうをした2変数および1変数の二分法の流れ図を 図-2 に示す。

応力計算および破壊抵抗曲げモーメント計算におけるコンクリートおよび鋼材の応力-ひずみ曲線が共通のものであれば、上記のように弾性域での応力計算も終局強度も同じ方程式を解けばよいのであるが、いろいろな条件での応力-ひずみ曲線の決定は難しく、なによりも計算が繁雑となるため、弾性域での応力計算および曲げ耐力の計算は別個のものとなっている。以下、応力計算および破壊抵抗曲げモーメントの計算について具体的に述べることにする。

3. 応力度の計算

応力度の計算では前記 2 つの仮定のほかに、コンクリートおよび鋼材の応力-ひずみ関係は直線で表わされるとする仮定を設ける。したがって応力度計算では鋼材およびコンクリートの弾性係数の比、 $n = E_s/E_c$ だけが問題となる。弾性計算では、コンクリートおよび鋼材の作用力は圧縮縁応力度 σ_c と弾性係数比 n および中立軸比 $k = x/d$ によって表わされるので、式(1)および(2)から $\epsilon_c(\sigma_c)$ を消去して 1 変数（中立軸比 k ）の方程式を解けばよいことになる。以下、各断面形状の場合について述べる。記号等はできるだけ「鉄筋コンクリートの新しい計算図表 (RG)」にあわせた。

3.1 矩形、T 断面および箱断面

軸方向力およびモーメント (A_s 位置に関する) の釣合いから次の方程式がえられる。

ここに、

$$f(k) = -k^3/3 + k^2 + C_3 k + T_2(k) - C_4 \dots \quad (9)$$

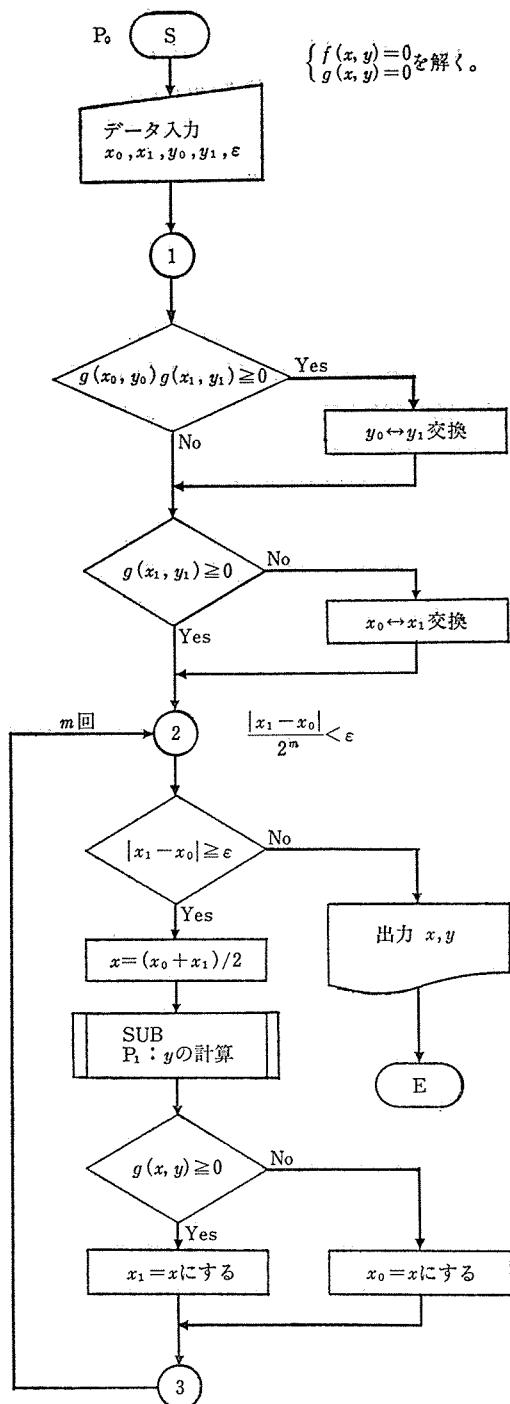
$$g(k) = k^2 + C_1 k + T_1(k) - C_2 \dots \dots \dots (10)$$

中立軸比 k は、

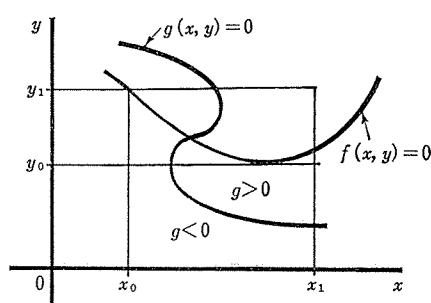
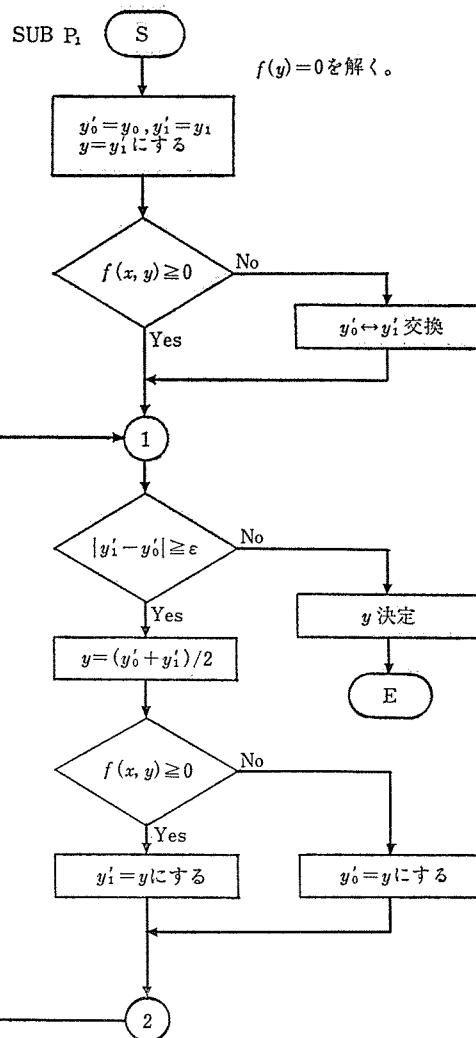
軸力 $N \neq 0$ の場合 $R(k) = 0$

軸力 $N=0$ の場合 $g(k)=0$

(二変数二分法)



(一変数二分法)



- 条件:
- 関数 f, g は連続で、範囲 $(x_0, x_1)(y_0, y_1)$ に 1 実根を持つ。
 - $f(x, y) = 0$ は、範囲 $(x_0, x_1), (y_0, y_1)$ において、 x に 1 つの y が対応する。
 - y の範囲 (y_0, y_1) は、範囲 (x_0, x_1) での $f(x, y) = 0$ 上の最大、最小値を含む範囲。
 y が一様増加あるいは減少ならば (y_0, y_1) もループ内で縮小すればよい。
 - x_0, x_1 および y_0, y_1 の大小は無関係。
 - 根がない場合は、 x_0 に収束。

図-2

報 告

記	号
$M' = M + Nr$	$\alpha = \frac{r_s}{r}$
$e = \frac{M}{N}$	$\beta = \frac{e}{r}$
$D = \frac{A_s}{\pi r^2}$	$\gamma = \frac{r_0}{r}$

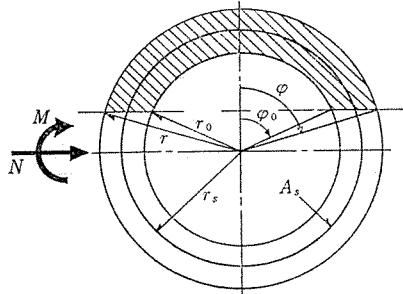


図-5

$$F(\varphi) = f(\varphi) - r^4 f(\varphi_0) + \pi n p \alpha^2 / 2 \quad \dots \dots \dots (23)$$

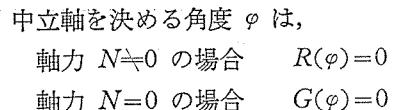
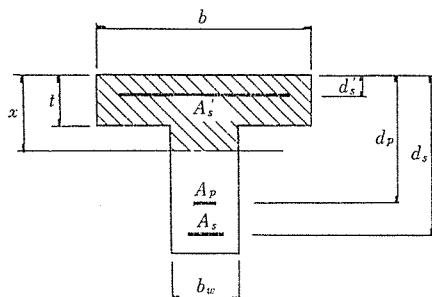
$$G(\varphi) = g(\varphi) - r^3 g(\varphi_0) - \pi n p \cos \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

$$f(\varphi) = \varphi/4 - \sin \varphi \cos \varphi/4 - \sin^3 \varphi \cos \varphi/6 \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

$$g(\varphi) = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \sin^3 \varphi / 3 \quad \dots \dots \dots (26)$$

ただし、 φ_0 は次の値とする。

$$\begin{cases} 0 < \varphi \leq \cos^{-1} r & \text{の時 } \varphi_0 = 0 \\ \cos^{-1} r < \varphi \leq \cos^{-1}(-r) & \text{の時 } \varphi_0 = \cos^{-1}(\cos \varphi / r) \\ \cos^{-1}(-r) < \varphi < \pi & \text{の時 } \varphi_0 = \pi \end{cases}$$



を解くことにより得られる。

応力度 σ_c , σ_s は、

ここに、

$$C = \frac{1 - \cos \varphi}{X(\varphi)} \dots \dots \dots \quad (29)$$

$$S = \frac{\alpha + \cos \varphi}{X(\varphi)} \dots \dots \dots \quad (30)$$

注: [[]] は条件付きカッコで $R(\varphi)$ の計算において $\beta = -1$ とする。

3.3 多段配置

多段配置の場合は、前に示した各方程式の定数項に各段の鋼材の係数を加えればよい。具体的には、矩形、T断面および箱断面の場合 A'_s を含む定数項に A'_s, d' を変えて加えていく。円および円環断面の場合は、 A_s を含む定数項に A_s, r を変えて加えればよい。

4. 破壊抵抗曲げモーメントの計算

破壊抵抗曲げモーメントの計算におけるコンクリートおよび鋼材の応力-ひずみ曲線は、PC 示方書、道路橋示方書では 図-7 から 図-8 のように規定されている。

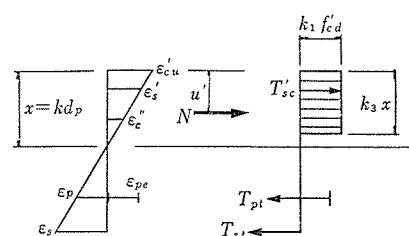


图-6

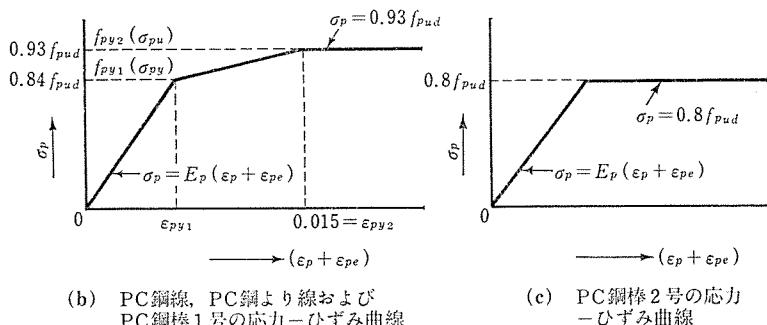
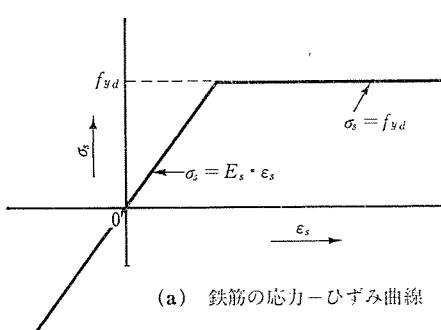


図-7 鋼材の応力-ひずみ曲線

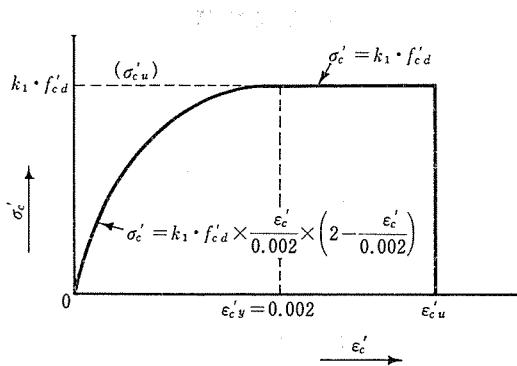
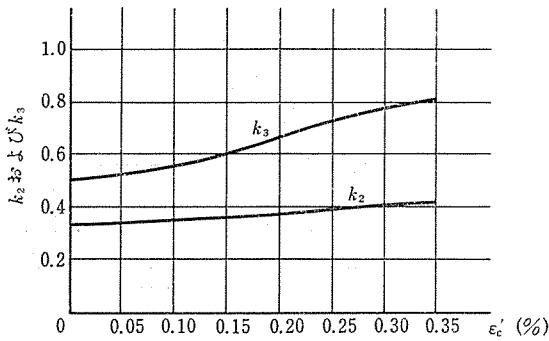


図-8 コンクリートの応力-ひずみ曲線

図-9 k_2 および k_3

曲げ破壊は、鋼材の破断がなければ、コンクリート圧縮部の圧壊によるわけであるが、鋼材のひずみに制限を加えて曲げ耐力とする場合もある。計算上は、コンクリート圧縮縁ひずみを終局ひずみとするか、鋼材ひずみを制限ひずみ（当然、圧縮縁ひずみは終局ひずみ以下）として、ひずみ分布を決めるかの違いだけである。

コンクリート圧縮合力は、応力ブロック係数 $k_1 \sim k_3$ を用いて表わすとコンクリート圧縮縁ひずみが終局ひずみに達している場合、 $k_1 = 0.810 \div 0.8$ 、 $k_2 = 0.416 \div 0.4$ となり図-6のような長方形ブロックに相当する。ここでは、 $k_1 f'_cd$ を図-8の曲線で考え、応力ブロック係数 k_3 を合力に対する係数、 k_2 を作用位置に対する係数として弾性域まで拡張する。幅 b を一定として、応力ブロック係数 k_2 、 k_3 は次式で表わされる。

($0 < \epsilon'_c \leq \epsilon'_cy$) の場合 (図-9 参照)

$$k_2(\epsilon'_c) = \frac{(4 - \epsilon'_c / \epsilon'_cy)}{4(3 - \epsilon'_c / \epsilon'_cy)} \quad (32)$$

$$k_3(\epsilon'_c) = \frac{(3 - \epsilon'_c / \epsilon'_cy)}{3(2 - \epsilon'_c / \epsilon'_cy)} \quad (33)$$

($\epsilon'_cy < \epsilon'_c \leq \epsilon'_cu$) の場合

$$k_2(\epsilon'_c) = \frac{(2 \epsilon'_c / \epsilon'_cy - 1)}{4 \epsilon'_c / \epsilon'_cy} + \frac{1}{4(3 \epsilon'_c / \epsilon'_cy - 1)} \quad (34)$$

$$k_3(\epsilon'_c) = 1 - \frac{1}{3 \epsilon'_c / \epsilon'_cy} \quad (35)$$

破壊抵抗曲げモーメントの計算は、コンクリート圧縮縁ひずみあるいは鋼材ひずみが明らかであるから軸方向の釣合い式(1)だけで中立軸位置を決定できる。以下、矩形およびT断面について述べる。

4.1 矩形およびT断面

軸方向の釣合いから次の方程式がえられる。

$$\begin{aligned} U(x) = & -\sigma'_c(\epsilon'_c)k_3(\epsilon'_c)bx \\ & + \sigma'_c(\epsilon''_c)k_3(\epsilon''_c)(b-b_w)[[x-t]] < 0 \rightarrow 0 \\ & + \sigma_s(\epsilon_s)A_s + \sigma_s(\epsilon'_s)A'_s \\ & + \sigma_p(\epsilon_p + \epsilon_{pe})A_p \\ & + N = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

注: [[]] は条件付きカッコでカッコ内が負の時は 0 とする。

$U(x)=0$ を解けば中立軸位置が決定できる。圧縮縁からの距離 y でのひずみ ϵ_y は、中立軸距離 x と y の関数として次のように表わされる。

$$\epsilon_y = \epsilon_u(y-x)/(y_u-x) \quad (37)$$

ここで、

ϵ_u : 制限ひずみ (終局ひずみ)

y_u : 圧縮縁から制限ひずみ位置までの距離

ただし、引張ひずみを正とする。

(圧縮縁ひずみが終局ひずみ ϵ'_{cu} の場合)

$$\epsilon_u = -\epsilon'_{cu} \quad y_u = 0 \text{ とする。}$$

(鋼材増加ひずみが制限ひずみ $\epsilon_{su}(\epsilon_{pu})$ の場合)

$$\epsilon_u = \epsilon_{su}(\epsilon_{pu}) \quad y_u = d_s(d_p) \text{ とする。}$$

鋼材ひずみが制限ひずみに達しているかどうかは、圧縮縁および鋼材ひずみを ϵ'_{cu} 、 ϵ_{su} とした時の中立軸 x を式(36)に代入し、正ならば ϵ_{su} 以下と判断できる。

破壊抵抗曲げモーメント M_u は圧縮縁でのモーメントの釣合いから次式によって計算される。

$$\begin{aligned} M_u = & -\sigma'_c(\epsilon'_c)k_3(\epsilon'_c)k_2(\epsilon'_c)bx^2 \\ & + \sigma'_d(\epsilon''_c)k_3(\epsilon''_c)(b-b_w)[[x-t]] < 0 \rightarrow 0 \\ & \times \{t + (x-t)k_2(\epsilon''_c)\} \\ & + \sigma_s(\epsilon_s)A_sd_s + \sigma_s(\epsilon'_s)A'_sd'_s \\ & + \sigma_p(\epsilon_p + \epsilon_{pe})A_pd_p \\ & + Nu' \end{aligned} \quad (38)$$

なお上記方程式を解くにあたり次のように、

$$x = kd_p \quad (39)$$

k : 中立軸比

と置いて、二分法により k の値 ($0 < k < 1$) を求めていく。

土木学会「コンクリート構造の限界状態設計法試案」等で鋼材の終局ひずみが決められていないのは、終局ひずみの値によって曲げ耐力の算定値は大差なく、計算も

報 告

簡単になるためである。したがって実際には長方形応力ブロックを適用して曲げ耐力の算定をすればよい。

5. III 種 (PRC) およびアンボンド PC

III種コンクリートは、同じ曲げ耐力を有する RC と比べ、わずかなプレストレスを導入することにより、ひびわれ幅およびたわみを小さくできるという利点がある。死荷重の設計荷重に占める割合が極端に大きくなくて、死荷重作用時のコンクリートのひびわれ幅を小さくおさえたい場合等には有効であり、韌性の面からも優れている。

アンボンド PC は、施工の合理化、省力化がはかれ、防錆に対する信頼性も高い。構造的には、鋼材に付着がないため、他に鉄筋が配置されていないとひびわれ幅、ひびわれ間隔が大きく、PC 鋼材の応力は均一に近い分布となるため定着部も応力変動の影響の受け易い。また曲げ破壊時の PC 鋼材応力は、付着のある場合よりも小さいので破壊抵抗曲げモーメントも小さく、設計上は、付着のある場合に比べ 70% から 90% に曲げ耐力を低減している。

応力計算上は、III種コンクリートの場合、鋼材位置コンクリートの応力が 0 となる状態の鋼材引張力（近似的に有効プレストレスでよい）を軸力として PC 鋼材図心位置に作用させた RC の応力計算を行う。アンボンド PC あるいは緊張時のように付着がない場合は、鋼材断面積 A_p を無視し、鋼材の微少な応力増加は無視する。

破壊抵抗曲げモーメントの計算においては、付着のある場合、PC は初期ひずみがあるだけで RC と計算方法に変わりはないが、アンボンド PC の場合は破壊時の PC 鋼材のひずみ（応力）の算定が問題となる。部材全体にわたる PC 鋼材のひずみを考慮して破壊断面での PC 鋼材のひずみ（応力）を算定するのは計算が実用的ではないので、破壊時の PC 鋼材引張応力度を実験式として与えたり、PC 鋼材位置コンクリートの増加ひずみに係数（0~1 の値）をかけたりすることによって計算する方法が考えられている。後者の方法の場合は破壊時の釣合い式の ϵ_p にこの係数をかけ、前者の場合は、鋼材断面積 A_p は無視して算定された破壊時 PC 鋼材引張力を鋼材位置に圧縮力として作用させてよい。

土木学会 PC 示方書、道路橋示方書では付着があるものとして計算した破壊抵抗曲げモーメントの 70% を付着のない場合の曲げ耐力としている。

6. プログラムの説明

プログラムの概要、条件および概略の流れ図を示す。

解法は二分法により、計算精度 $\epsilon = 10^{-5}$ (約 5 術)。

応 力 度 計 算

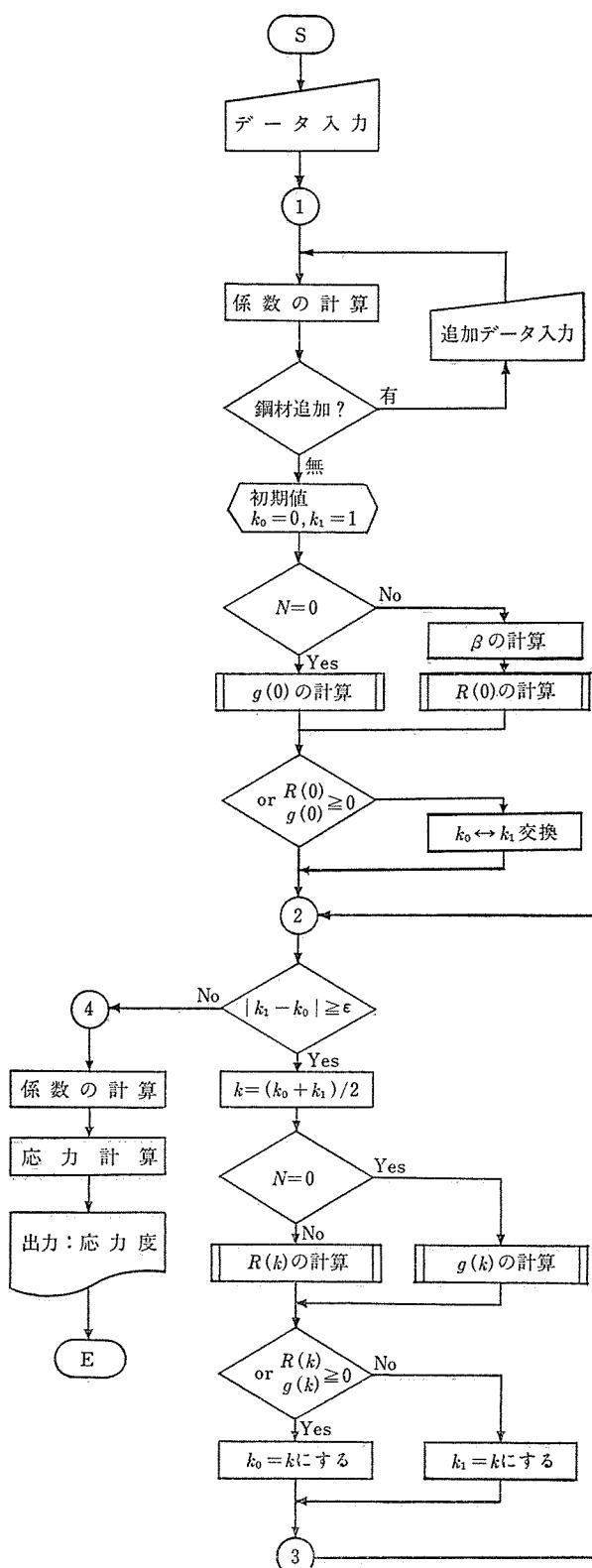


図-10

6.1 応力計算 (M, N) RC (多段配置), PRC

FP 100 矩形 $\sigma_c, \sigma_s, \tau_c$ (中立軸)

FP 110 矩形, T断面 σ_c, σ_s

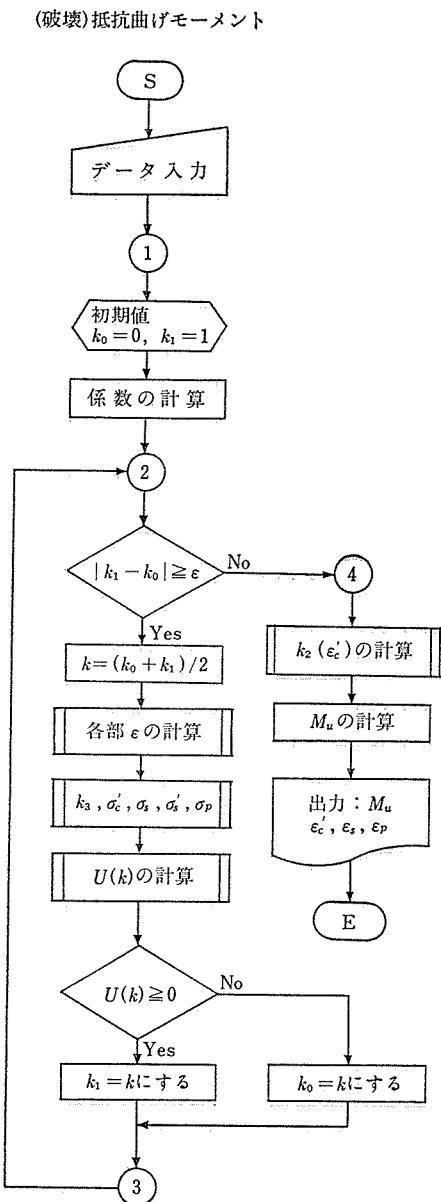


図-11

- FP 120 円, 円環断面 σ_c, σ_s
条件として,
- 1) 中立軸は圧縮縁と $A_s(d)$ との間にある。全断面圧縮, 引張の場合, 0 表示となる。
 - 2) 円, 円環での A_s および矩形, T 断面での A''_s ($d'_s \sim d_s$) は一様分布の鋼材とする。
 - 3) 初期データ以外の多段配置は 1° 表示で HLT となった後, $A'_s, d'(A_s, R_s)$ にそれぞれ, 鋼材の断

面積および位置を入力し, AC, EXE と押し, 必要なだけ繰返す。追加がない場合そのまま EXE。

- 4) 鋼材は断面内のどこにあってもよい。
- 5) PRC では $A_p \sigma_{pe}$ を軸力として入力する。

6.2 曲げ耐力の計算

〔FP 200 矩形 鋼材ひずみ制限有（無）〕

- 1) このプログラムは, コンクリートおよび鋼材の応力ひずみ関係を 図-7~8 として非線形を考慮し, 断面の一か所のひずみを指定した場合の抵抗モーメントを計算する。したがって, ここでは $\epsilon_s=1\%$ としているが, P_i のデータを変えれば, ϵ_p の制限, 圧縮縁ひずみ ϵ'_{cu} の場合も計算できる（引張ひずみを正とする）。

ついでに述べると, ϵ_s を許容応力度時のひずみとした場合の抵抗モーメントは, 弾性計算とよく合い, Ⅲ種, ひびわれモーメント概算にも使用できる。

- 2) 中立軸は圧縮縁と PC 鋼材の間にある。 $A_p=0$ の時は $d_p=d_s, \epsilon_{pe}=0$ とする。
- 3) A_s, A'_s は断面のどこにあってもよい。

〔FP 210 矩形, T 断面, 圧縮縁ひずみ ϵ'_{cu} 〕

- 1) 圧縮縁ひずみ ϵ'_{cu} で, 圧縮力は長方形ブロックとしている ($\epsilon'_{cu}=0.0035$)。
- 2) T 断面で圧縮域がフランジ内の場合 0 表示となるので矩形としてやり直す。矩形の場合 $b=b_w$ とする。

その他 FP 200 の 2), 3) 参照。

7. あとがき

現在の設計業務においては, 計算のかなりの部分が電算化されつつある。設計計算の目的, 精度, 合理化を考えれば, 電算使用を前提とする部分はますますふえると思われる。本稿で述べたような比較的簡単な計算についてもマイクロコンピューターの使用は, 図表とは別の一つのやり方であると思う。本稿が日常の設計に少しでも役に立てば幸いである。

参考文献

- 1) 土木学会, コンクリート構造の限界状態設計法試案, 1981, コンクリートライブリヤー 48 号
- 2) 上前, 岡田, 玉野, 小林: 鉄筋コンクリートの新しい計算図表 (RG), 近代図書, 1974 年

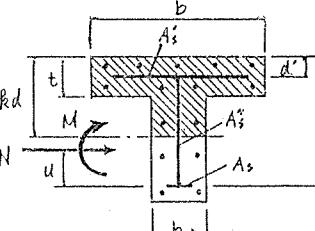
【昭和 57 年 8 月 6 日受付】

[FP 100] 鉄筋コンクリート応力計算(矩形)

[FP 110] 鉄筋コンクリート応力計算(矩形, T断面, 箱断面)

Vol. 25, No. 1, Jan. 1983

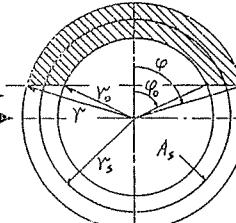
66



[FP 120] 鉄筋コンクリート応力計算(円, 円環)

三

四



[FP 200] 破壊抵抗曲げモーメント(矩形、鋼材ひずみ制限有)

Vol. 25, No. 1, Jan. 1983

101

[FP 210] 破壊抵抗曲げモーメント(矩形, T断面, 鋼材ひずみ制限無)

報告